Tipps zur Serie 6:

Aufgabe 6.1:

Hier wird noch nicht die Methode der Lagrange Multiplikatoren benötigt (sie wäre sowieso nur für die einzelnen Randstücke hilfreich, überlegt euch warum?)

$\rightsquigarrow$ Vergesst auf keinen Fall, die Rand- & Eckpunkte besonders zu beachten!

Aufgabe 6.2:

Sollte selbst erklärend sein, benutzt sonst am Ende noch Wolfram Alpha, um die Fläche graphisch darzustellen.

Aufgabe 6.3:

a)

Beschränkt euch auf einige wenige Linien z.B.:

$u = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ und $v = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

b)

$\Rightarrow$: Wir suchen $g(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 1$. Nehmt an x, y, z seien definiert wie in (2) und nehmt $g(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2$ als Kandidaten von g. Setzt (2) in dieses g ein und zeigt, dass $g(x,y,z) = 1$ tatsächlich $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Jetzt wisst ihr, dass falls (x,y,z) auf einem Torus liegt $g(x,y,z)=1$ ist. Wir müssen die andere Richtung noch betrachten!

$\Leftarrow$: Da wir wissen, dass (2) einen Torus beschreibt, reicht es, rückwärts einzusetzen und zu zeigen, dass $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $g(x,y,z)=1$ ein $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ gefunden werden kann, mit $\vec{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (x,y,z)$.
(Nicht zu weit überlegen, ist vlt. fast zu offensichtlich)

Aufgabe 6.4:
Achtung, in der Aufgabe gibt es keine Einschränkung auf $x,y \geq 0$, ihr könnt aber die Symmetrie des achsensymmetrischen Rechtecks ausnutzen, um dies zu tun! (Vereinfacht die Rechnung, aber achtung bzgl. dem Flächeninhalt!)
Überlegt euch welche Funktion ihr maximieren wollt und was die Nebenbedingung g genau ist.
Nutzt dann die Methode der Lagrange Multiplikatoren, um 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten zu finden.

Tipp: Die Ellipsenfläche ist $\pi \cdot a \cdot b$

Aufgabe 6.5:

Falls in der Vorlesung behandelt, solltet ihr zuerst die Existenz eines Maximums von x auf der Menge mithilfe des Satzes vom Maximum & Minimum zeigen (f muss stetig und die beschriebene Menge kompakt sein).

Hier haben wir nun zwei Nebenbedingungen, wir erweitern unseren Ansatz also zu

$$\nabla f = \lambda \nabla F + \mu \cdot \nabla G$$

$$F = 0$$

$$G = 0$$

und lösen das entsprechende Gleichungssystem.

Aus dem Gleichungssystem werden sich 3 Fälle ergeben, betrachtet dementsprechend $y=0$, $z=0$ & $y,z \neq 0$.

Aufgabe 6.6:

Analog zu 6.5, zeigt erst die Existenz des gesuchten Maximas bzw. Minimas und wendet dann die Methode der Lagrange Multiplikatoren mit zwei Nebenbedingungen an.